Ueber einige bemerkenswerte Gattungen

der

Hypocykloiden.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Heinrich Schotten.



Marburg 1883.

Druck von L. Döll in Kassel.

Seinem lieben Schwiegervater

Herrn Regierungsrath Gustav Blobel

in

aufrichtiger Verehrung

der Verfasser.

Unter den Hypocykloiden sind es vorzugsweise zwei Gattungen, welchen das Interesse der Geometer sich zuwendet, nämlich die dreieckige und die viereckige. Diese Bezeichnung findet ihre Begründung in der Gestalt der Kurven. Eine Hypocykloide überhaupt wird erzeugt durch einen auf der Peripherie eines beweglichen Kreises markierten Punkt, wenn dieser Kreis im Innern eines gegebenen festen Kreises herumrollt. Nehmen wir diese Erzeugungsweise an, so entsprechen die dreieckige und viereckige Hypocykloide den beiden Fällen, wenn der Radius des festen Kreises entweder das Dreifache oder das Vierfache des Radius des rollenden Kreises ist. In jedem Punkte, wo der erzeugende Punkt auf die Peripherie des festen Kreises fällt, besitzt die Kurve eine Spitze; denn an einer solchen Stelle nähert sich der erzeugende Punkt dem festen Kreise in der Richtung von dessen Normalen und entfernt sich alsdann in derselben Richtung wieder von ihm, d. h. der besagte Punkt ist stationär und die Normale der festen Kurve ist die entsprechende Tangente der erzeugten Kurve. Für rationales Verhältnis der beiden Kreisradien entstehen nun so viele Spitzen als die Verhältniszahl angiebt.

Die dreieckige sowohl als die viereckige Hypocykloide lassen sich indessen auch noch auf andere Arten erzeugen.

Kapitel I.

Die dreieckige Hypocykloide.

§. 1.

Ein Satz von Steiner*) lautet: „Fällt man aus jedem Punkte des einem Dreieck umschriebenen Kreises Perpendikel auf die drei Seiten, so liegen deren Fußpunkte auf einer Geraden G. Die Enveloppe dieser Geraden ist eine Kurve dritten Grades und vierter Ordnung. $G\infty$ ist ideelle Doppeltangente der Kurve, die drei Rückkehrpunkte hat. Die drei Rückkehrtangenten schneiden sich in einem Punkt. Die Kurve berührt die Seiten und Höhen des Dreiecks."

Diese von Steiner geschilderte Kurve ist identisch mit der dreieckigen Hypocykloide. Der Beweis dafür, daß die Fußpunkte der Perpendikel auf einer Geraden liegen, wird von Steiner nicht gegeben. Dieser letztere Satz rührt nach einer Notiz von Servois in Gergonne's Annalen von R. Simson her **).

---

*) Crelle, Journal. Bd. 53. S. 231.

**) Baltzer, Elemente II. §. 3.

Ein elementarer Beweis ist folgender: Wenn die Punkte $ABCD$ auf einem Kreise liegen und A_1 der Fußpunkt der Normalen von D auf BC, B_1 analog auf CA, C_1 auf AB ist, so liegen $A_1\ B_1\ C_1$ auf einer Geraden, weil aus der Betrachtung der Kreisvierecke $A_1\,B_1\,C\,D$ und $A_1\,B\,C_1\,D$ sich ergiebt:

$D\hat{A}_1 B_1 = D\hat{C}B_1$ als Peripheriewinkel auf DB_1,

$D\hat{C}B_1 = D\hat{C}A$,

$D\hat{C}A = D\hat{B}A$, Peripheriewinkel auf DA,

$D\hat{B}A = D\hat{B}C_1$

$D\hat{B}C_1 = D\hat{A}_1 C_1$ Peripheriewinkel im Kreisviereck $A_1\,B\,C_1\,D$.

Folglich $D\hat{A}_1 B_1 = D\hat{A}_1 C_1$, also liegen $A_1\ B_1\ C_1$ auf einer Geraden.

Nimmt man das Centrum des festen Kreises als Anfangspunkt, so daß die Ecken des Dreiecks die Koordinaten haben:

$$1)\ x_1 = r.\cos 2\alpha;\quad y_1 = r.\sin 2\alpha.$$
$$2)\ x_2 = r.\cos 2\beta;\quad y_2 = r.\sin 2\beta.$$
$$3)\ x_3 = r.\cos 2\gamma;\quad y_3 = r.\sin 2\gamma$$

während die Koordinaten des beweglichen Punktes sind:

$$\xi = r.\cos 2\varphi;\ \eta = r.\sin 2\varphi,$$

so ergiebt sich als Gleichung der Fußpunktenlinie:

$$x.\sin(\alpha+\beta+\gamma-\varphi) - y.\cos(\alpha+\beta+\gamma-\varphi) = \tfrac{1}{2}r.[\sin(\alpha+\beta+\gamma-3\varphi) + \sin(\beta+\gamma-\alpha-\varphi) + \sin(\gamma+\alpha-\beta-\varphi) + \sin(\alpha+\beta-\gamma-\varphi)].$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung der Tangente der dreieckigen Hypocykloide und läßt sich daher auf die Form bringen:

$$x.\cos\varphi - y.\sin\varphi = r.\cos 3\varphi;$$

die Enveloppe der Fußpunktenlinie ist also in der That unsere Kurve.

Ein weiterer Beweis ergiebt sich aus der Betrachtung des Steiner'schen Krümmungsschwerpunktes, der für das Dreieck mit dem Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises identisch ist. Für jeden Punkt eines Kreises, der den Krümmungsschwerpunkt zum Mittelpunkt hat, ist der Inhalt des Fußpunktendreiecks konstant. Da beim umgeschriebenen Kreise also auch das Fußpunktendreieck für alle Punkte der Peripherie konstant ist, so muß sein Inhalt hier verschwinden, da für die Ecken des Dreiecks als Pole das Fußpunktendreieck = 0 ist.

Salmon-Fiedler*) giebt den Beweis des Satzes in Dreilinienkoordinaten. Die Gleichung des dem Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ umbeschriebenen Kreises ist

$$x_2.x_3.\sin A_1 + x_3.x_1.\sin A_2 + x_1\,x_2.\sin A_3 = 0$$

und diese Gleichung enthält als geometrische Deutung den Satz:

Fällt man von einem Punkte O der Ebene auf die drei Seiten eines Dreiecks Perpendikel und verbindet die Fußpunkte derselben, so entsteht ein neues Dreieck, dessen Inhalt verschwindet, so lange der Punkt O sich auf der Peripherie des dem ersten Dreieck umbeschriebenen Kreises bewegt d. h. die drei Fußpunkte liegen in diesem Falle auf einer Geraden.

Es ist besonders merkwürdig, daß weder Gestalt noch Größe des Dreiecks einen Einfluß auf die Größe der Hypocykloide ausüben, sondern daß lediglich der Radius des dem Dreiecke umbeschriebenen Kreises in der Gleichung der Kurve auftritt.

*) Salmon-Fiedler, A. G. d. K. Art. 156.

Halten wir eine Seite des Dreiecks oder, was gleichbedeutend ist, zwei Ecken des Dreiecks fest, während die dritte Ecke auf der Peripherie eines durch ihre anfängliche Lage bestimmten Kreises sich bewegt, und fällen von einem Punkt der Peripherie Perpendikel auf die drei Seiten, so werden die Fußpunkte auf Geraden liegen, die alle durch ein und denselben Punkt gehen, nämlich den Fußpunkt des Perpendikels von dem markierten Punkte der Peripherie auf die feste Gerade. Mit andern Worten: Bewegt sich ein Peripheriewinkel so, daß seine beiden Schenkel stets durch zwei feste Punkte auf der Peripherie gehen, so liegen die Fußpunkte der Perpendikel von einem Punkte der Peripherie auf seine Schenkel auf Geraden, die alle durch denselben Punkt gehen. Es entsprechen also bestimmten Punkten der Peripherie in diesem Falle einer festen Dreiecksseite bestimmte Punkte eben dieser Seite. Durch jeden Punkt der festen Geraden gehen unendlich viel Gerade, die zu den erzeugenden Linien der Kurve gehören, da wir andererseits für die verschiedenen Lagen des durch zwei feste und eine variable Ecke bestimmten Dreiecks den angenommenen Punkt die Peripherie durchlaufen lassen können, wodurch wir die Hypocykloide als Enveloppe der Fußpunktenlinien erhalten. Weitere Untersuchungen über den Zusammenhang der verschiedenen erzeugten Kurven für diesen Fall und dann, daß das Dreieck überhaupt jede mögliche Lage im Kreis annehmen kann, während der frühere variable Punkt der Peripherie fest bleibt, behält sich Verfasser vor. Dieselbe Voraussetzung einer festen Dreieckseite giebt auch das andere merkwürdige Resultat, daß für sämmtliche Dreiecke, die durch Variation der dritten Ecke auf der Peripherie des zugehörigen Kreises möglich sind, die Feuerbach'schen Kreise ein Kreisbüschel bilden, dessen Mittelpunkt der Halbierungspunkt der festen Sehne ist. Da der Feuerbach'sche Kreis den Radius von halber Länge des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises hat, und da, wie sich zeigen wird, von ihm die Größe und Lage der Hypocykloide allein abhängt, so geht auch hieraus hervor, daß das Dreieck, direkt ohne Einfluß auf die erzeugte Kurve, nur insofern in Betracht kommt, als die Lage und Größe des Feuerbach'schen Kreises von ihm abhängt. Die Größe des letzteren ist aber bei unendlich vielen Dreiecken dieselbe.

§. 2.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir zunächst auf die Kurve, die wir als Enveloppe der Fußpunktenlinie definierten, näher eingehen. Wir beziehen uns dabei auf Figur 1. Die beiden Figuren 2 und 3 zeigen die speziellen Fälle, wo das Dreieck einmal rechtwinklig-gleichschenklig, das anderemal gleichseitig ist.

Es sei $a\ b\ c$ (Fig. 1) das gegebene Dreieck, O der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises; ae, bf, cg sind die Höhen des Dreiecks, d der Schnittpunkt derselben; α, β, γ sind die Mittelpunkte der Seiten, m der Mittelpunkt des durch sie und die Fußpunkte der Höhen e, f, g gehenden Kreises, des Feuerbach'schen Kreises, dessen Radius gleich der Hälfte vom Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist. m liegt auf der Mitte von do, der Euler'schen Geraden, so daß also d äußerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist. Theilen wir jetzt die Bogen αe, βf, γg des Feuerbach'schen Kreises durch die Punkte u, v, w so, daß $\widehat{\alpha u} = \frac{1}{3}\,\widehat{\alpha e}$, $\widehat{\beta v} = \frac{1}{3}\,\widehat{\beta f}$, $\widehat{\gamma w} = \frac{1}{3}\,\widehat{\gamma g}$ ist, so wird $u\,v\,w$ ein gleichseitiges Dreieck. Von der Lage dieses Dreiecks ist nun die Lage der Hypocykloide abhängig. Dasselbe ist der Hypocykloide eingeschrieben, so daß seine Ecken auf der Kurve liegen. Dies muß hier besonders erwähnt werden, da wir auch ein gleichseitiges eingeschriebenes Dreieck konstruieren können, dessen Seiten Tangenten an die Kurve sind. Der Spezialfall, daß das ursprüngliche Dreieck ein gleichseitiges ist, zeigt, daß das einbeschriebene Tangentialdreieck identisch ist mit dem Grunddreieck, während das andere eingeschriebene Dreieck die Mitten der Seiten des ursprünglichen verbindet.

Verbinden wir P mit d, so wird dP durch die zu P gehörige Fußpunktenlinie G halbiert und zwar in x auf der Peripherie des Feuerbach'schen Kreises. x heißt der Mittelpunkt von G, s der Scheitel. Es ist dies der Punkt, in dem G den Kreis zum zweitenmale trifft. Ist nun P_1 der Gegenpunkt von P, G_1 die zu P_1 gehörige Fußpunktenlinie, so schneiden sich G_1 und G senkrecht in s und die Mitte x_1 der Geraden G_1 ist Gegenpunkt von x im Kreise, der durch die Mitten der Dreieckseiten geht. PP_1 ist parallel zu xx_1.

Die Fußpunktlinien, deren Enveloppe die Kurve G^3 ist, sind also paarweise zu einander senkrecht oder die Tangenten der Kurve sind paarweise zu einander senkrecht. Der Ort der Schnittpunkte oder der Ort des Scheitels des rechten Winkels ist ein Kreis und zwar der zum Dreieck gehörige Feuerbach'sche Kreis. Die Euler'sche Gerade verbindet die Mitten der parallelen Geraden PP_1 und xx_1. Besonders erwähnenswerth ist es, daß jede der Dreieckseiten mit ihrer zugehörigen Höhe ein Tangentenpaar bildet. Es ist offenbar, daß sie den oben aufgestellten Bedingungen genügen.

Das System der Tangentenpaare G und G_1 kann auch noch auf andere Weise auf folgende Art bestimmt werden. Nimmt man auf dem Feuerbach'schen Kreise einen Punkt p an und eine beliebige aber feste Richtung q und zieht durch jeden Punkt s auf der Peripherie desselben Kreises eine Gerade durch den Punkt p und parallel zu der angenommenen Richtung und halbiert die von diesen beiden Geraden gebildeten Nebenwinkel durch zwei andere Gerade, so bilden diese letzteren ein dem Geradenpaare GG_1 ähnliches System und umhüllen also eine Kurve G_3, denn ihr Schnittpunkt bewegt sich auf einem Kreise, während sie selbst rechtwinklig zu einander sind, die Eigenschaften, die wir oben als den Tangentenpaaren der Kurve zukommend erkannten.

Eine andere Konstruktion der Kurve G^3 stützt sich ebenfalls auf den Feuerbach'schen Kreis. Zieht man in demselben eine beliebige Sehne z. B. vom Punkte P die Sehne PP_1, dann senkrecht zu dem durch P gehenden Durchmesser $P_1 P_2$ u. s. f., so hüllen diese Sehnen eine Kurve G^3 ein unter der Voraussetzung, daß Bogen PP_1 inkommensurabel zur Peripherie ist.

Die beiden zuletzt angegebenen Konstruktionen sind eindeutig bestimmt, wenn der Radius des Feuerbach'schen Kreises gegeben ist. Wie nun zu jedem Dreieck der Feuerbach'sche Kreis eindeutig zugehört, es aber unendlich viele Dreiecke giebt, deren zugehörige Feuerbach'sche Kreise sich nur durch die Lage, aber nicht durch die Größe des Radius unterscheiden, so gehören auch zu jedem Kreise unendlich viele Dreiecke, die in der angegebenen Relation stehen, so daß auch hier die Mannigfaltigkeit des Grunddreiecks in der geforderten Weise gewahrt wird.

§. 3.

Schröter*) giebt die dreieckige Hypocykloide als das Erzeugnis zweier projektivischen Gebilde, von denen das eine auf einer Geraden, das andere auf einem Kreise sich befindet, und zwar ist die Gerade die unendlich entfernte $G\infty$, der Kreis derjenige, der bei der früheren Konstruktion als der Feuerbach'sche auftrat; die Gebilde selbst sind projektivisch gleich, aber ungleich liegend**).

Die beiden Gebilde sind so aufeinander projektivisch bezogen, daß ein Strahlbüschel, das seinen Mittelpunkt auf dem gegebenen Kreise hat, mit der Punktreihe projektivisch ist, d. h. verbindet man einen beliebigen, aber festen Punkt P auf dem Kreise mit einem Punkte der Punktreihe, so muß der Ort des

---

*) Crelle, Journal. Bd. 54. S. 31.

**) Steiner, Abhängigkeit geometr. Gest. S. 64.

Durchschnittspunktes dieser Geraden und eines Strahles durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels ein Kegelschnitt sein, der sich in unserm besonderen Falle als eine gleichseitige Hyperbel darstellt.

Von Steiner*) finden wir in den vermischten Sätzen noch eine andere Erzeugungsweise unserer Kurve. Es umhüllen die Axen aller einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Parabeln eine dreieckige Hypocykloide, deren drei Rückkehrtangenten sich in dem Mittelpunkte des dem Dreieck umschriebenen Kreises treffen unter gleichen Winkeln von 120°. Jede derselben hat die Länge $3r$ des Kreises. Die drei Rückkehrpunkte liegen also in einem mit dem dem Dreieck umbeschriebenen konzentrischen Kreise. Wir sehen, daß in diesem Falle der dem Dreieck umbeschriebene Kreis identisch ist mit dem, den wir der Kurve einbeschreiben können, daß also hier der ursprünglich auftretende Kreis übereinstimmt mit einem der bei der Kurve selbst vorkommenden, während bei der zuerst angegebenen Methode der Grundkreis keinen Einfluß auf die Lage der Kurve ausübte. Der in dem jetzigen Falle dem Dreieck umbeschriebene Kreis entspricht dem Feuerbach'schen im ersten Falle. Der rollende Kreis ist hier gleich dem dem Dreieck umbeschriebenen, während er im ersten Konstruktionsverfahren dem zu dem Dreieck gehörigen Feuerbach'schen gleich war. Wählen wir hier als Grunddreieck speziell ein gleichseitiges, so ist es der entstehenden Kurve einbeschrieben, so daß seine Ecken auf den Scheiteln der Kurve liegen. Die Scheitel haben dieselbe Bedeutung, wie oben definiert worden ist.

Jede Fußpunktlinie G wird nun von einem Tangentenpaar, das, wie wir oben gesehen haben, rechtwinklig zu einander ist, während der Ort der Scheitel der rechten Winkel ein dem Dreieck eigentümlicher Kreis ist, in zwei Punkten geschnitten, die gleichweit von dem oben als Mittelpunkt bezeichneten Punkte der Geraden G entfernt liegen. Wir erhalten dadurch eine weitere Konstruktion der dreieckigen Hypocykloide und zwar so, daß wir die einzelnen Punkte der Kurve bequem konstruieren können. Zeichnen wir nämlich die Paare Fußpunktenlinien und tragen von dem zweiten Schnittpunkte, den die beiden Geraden des Paars mit dem Feuerbach'schen Kreise haben, die Länge der Sehnen ab, so ergeben uns die Endpunkte die Punkte der Kurve selbst. In unserer Figur 1 ist s der Scheitel, x der Mittelpunkt der Geraden G, x_1 der Mittelpunkt von G_1; es ist $xt = xs$ und $x_1 t_1 = x_1 s$. t und t_1 sind also Punkte der Kurve. Es zeigt sich nun, daß die Gerade durch die beiden Berührungspunkte eines Paares wiederum eine erzeugende Linie der Kurve ist, während ihre konjugierte durch den Scheitel des ersten Paares geht. Diese Methode können wir also benutzen, nicht nur um sämmtliche Punkte der Kurve zu konstruieren, sondern auch alle der Kurve zugehörigen Enveloppenpaare.

Es verdient besonders erwähnt zu werden, daß die Entfernung der Berührungspunkte eines Paares eine konstante Größe ist und zwar = dem Vierfachen des Radius des Feuerbach'schen Kreises. Da, wie wir gesehen, durch die Berührungspunkte wiederum eine erzeugende Linie oder Tangente geht, so stimmt dies damit überein, daß Steiner sagt, die Kurve G^3 schneide jede ihrer Tangenten in zwei Punkten, die den konstanten Abstand $4r$ haben. Allerdings spricht Steiner nicht aus, daß er mit dem Radius r den des Feuerbach'schen Kreises meine.

Wie oben gezeigt wurde, lassen sich der Kurve ein Kreis um-, ein anderer einbeschreiben, von denen der letztere der Feuerbach'sche ist, der zu dem Grunddreieck gehört, während der umbeschriebene mit diesem konzentrisch liegt, aber einen dreimal so großen Radius besitzt. Der letztere entspricht also der Basis der Hypocykloide. Die Tangenten in den Berührungspunkten des Kreises mit der Kurve bilden ein gleichseitiges Dreieck ABC, das viermal so groß ist, als das gleichseitige Dreieck uvw, dessen Ecken

*) Crelle, Journal. Bd. 55. S. 371.

auf den Mitten seiner Seiten liegen. Die Tangenten BC, CA, AB sind mit Durchmessern des Feuerbach'schen Kreises zu Paaren konjugiert, da sie zugleich auch Tangenten dieses Kreises sind. Die Ecken $u\ v\ w$ sind die Scheitel dieser Paare. Tragen wir auf diesen Durchmessern die konstante Länge $4r$ ab — dies ist nichts anderes, als wenn wir von ihrem Mittelpunkte die Länge der Sehne, die ja in diesem Falle $2r$ beträgt, da die Sehnen Durchmesser sind, abtragen würden — so erhalten wir die Berührungspunkte dieser Tangenten mit der Kurve, die also auf dem umbeschriebenen Kreise liegen. Sie sind also identisch mit den Rückkehrpunkten der Kurve. Sehen wir dieses Resultat von anderer Seite an, so ergiebt sich daraus, daß die Rückkehrtangenten sich in einem Punkte schneiden und gleich lang sind. Der Punkt, in dem sie sich schneiden, ist der Mittelpunkt des ein- und umbeschriebenen Kreises. Die drei Rückkehrtangenten sind zugleich Normalen der Kurve in ihren Scheitelpunkten, wenn wir hierunter die Punkte verstehen, in denen sie von dem einbeschriebenen Kreise berührt wird. Ihre Länge beträgt somit das Dreifache vom Radius des Feuerbach'schen Kreises. In dem besonderen Falle des gleichseitigen Grunddreiecks verhalten sich Feuerbach'scher, Grund- und umbeschriebener Kreis nicht nur, wie im allgemeinen Falle, wie 1 : 2 : 3, sondern alle drei Kreise liegen in diesem Falle in konzentrischer Lage.

§. 4.

Es wird nicht ohne Interesse sein, noch auf den Zusammenhang der Hypocykloiden mit den regelmäßigen Polygonen hinzuweisen. Giebt n das Verhältnis zwischen den Radien des festen und des rollenden Kreises an, so lassen sich für alle rationalen ganzen Werte von n drei regelmäßige Polygone konstruieren, die jedesmal so viel Ecken resp. Seiten haben, als die Verhältniszahl n angiebt. Die Polygone haben also immer ebensoviele Ecken, als die Hypocykloide Spitzen hat. Wir haben für den Fall der dreieckigen Hypocykloide schon darauf hingewiesen, daß wir derselben zwei Dreiecke einbeschreiben, eines umschreiben können, von denen das eingeschriebene Tangentendreieck und das umbeschriebene Dreieck ähnliche Lage haben. Die Seiten des einen sind mit denen des anderen parallel. Das eingeschriebene Dreieck, das mit den Ecken in den Scheiteln der Hypocykloide liegt, hat gerade umgekehrte Lage. Auch dessen Seiten sind parallel mit den Seiten der beiden anderen Dreiecke. Die drei Dreiecke verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie die Quadrate der Radien der drei Kreise, während ihre Seiten sich verhalten wie die Radien der betreffenden Kreise selbst. Analoges gilt nun für jeden rationalen Wert der Zahl n d. h. für jede $n$eckige Hypocykloide.

Der Vollständigkeit halber sollen hier auch die Beziehungen wiederholt werden, die Steiner*) für die bei der Kurve auftretenden Vierecke und Kreise gefunden hat.

Sind GG_1 und HH_1 (siehe Figur 4) irgend zwei Paare und wird G von H und H_1 in a_1 resp. d_1, G_1 von H und H_1 in b_1 resp. c_1 geschnitten, so sind $a_1\,c_1$ und $b_1\,d_1$ ein drittes Paar JJ_1. Ein solches Tripel von Tangentenpaaren mit dem Quadrupel der Schnittpunkte $a\,b\,c\,d$ bilden, wie schon oben bemerkt wurde, die Seiten des Dreiecks mit ihren zugehörigen Höhen. $a\,b\,c\,d$ bilden ein vollständiges Viereck, dessen drei Paar Gegenseiten zu einander senkrecht sind oder vier Punkte, von denen jeder der Höhenschnitt des durch die drei anderen gebildeten Dreiecks ist. Bei allen diesen Vierecken ist die Summe der Quadrate der Gegenseiten konstant, also:

$$\overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bd}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 16\,r^2$$

*) Crelle, Journal. Bd. 53.

Wir haben oben gesehen, daß auch die Entfernung der Berührungspunkte eines Paares eine konstante Größe ist und zwar $= 4r$, so daß sich also, dies mit dem eben erlangten Resultate verglichen, der bemerkenswerte Satz ergiebt:

Die Summe der Quadrate der Gegenseiten des Vierecks $a\,b\,c\,d$ ist gleich dem Quadrate des Abstandes der Berührungspunkte eines Paares der erzeugenden Linien,

$$\text{z. B. } \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = \overline{tt_1}^2 \text{ (Fig. 1).}$$

Diese Relation scheint Steiner entgangen zu sein.

$a\,b\,c\,d$ liegt innerhalb der Kurve G^3. Die den Dreiecken $a\,b\,c$, $a\,b\,d$, $a\,c\,d$, $b\,c\,d$ umbeschriebenen Kreise sind gleich, also, da der dem Dreiecke umbeschriebene Kreis dazu gehört, so sind sie alle gleich dem dem Dreiecke umbeschriebenen Kreise und haben folglich einen doppelt so großen Radius, als der dem Dreiecke eigentümliche Feuerbach'sche Kreis. Dieser hinwiederum ist also für Dreiecke, die den oben geschilderten Bedingungen genügen, gleich groß. Die Mittelpunkte der vier Kreise seien resp. $\delta_1, \gamma_1, \beta_1, \alpha_1$. Das von diesen Punkten gebildete Viereck ist gleich dem Viereck $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und gleich dem Viereck $a\,b\,c\,d$ und liegt so, daß die Geraden $a_1\,\alpha_1$, $b_1\,\beta_1$, $c_1\,\gamma_1$, $d_1\,\delta_1$ durch den Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises gehen und in demselben gehälftet werden. Folglich haben die den Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ umbeschriebenen Kreise die resp. Mittelpunkte d, c, b, a und ihre Radien sind ebenfalls $2r$. Die Gegenseiten $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ sind rechtwinklig zu einander und bilden die drei Paare GG_1, HH_1, JJ_1, deren Scheitel wiederum als geometrischen Ort den Feuerbach'schen Kreis haben. Die Enveloppe derselben ist also eine der ersten Kurve gleiche Kurve G^3, die den Feuerbach'schen Kreis in den Gegenpunkten derjenigen Punkte berührt, in denen die ursprüngliche Kurve denselben berührt.

Dem Viereck $a\,b\,c\,d$ ist ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln umbeschrieben, deren verschiedene Asymptotenpaare die gesammten Tangentenpaare der Kurve G^3 sind, d. h. jede Fußpunktlinie G ist eine Asymptote einer dem Dreieck umbeschriebenen gleichseitigen Hyperbel, die durch den Schnittpunkt der Höhen geht und den Scheitel s der Geraden G zum Mittelpunkt hat.

§. 5.

Eine weitere Konstruktion unserer Kurve findet sich von Eckardt*) angegeben.

Wenn sich zwei Punkte auf einer Kreisperipherie, beide mit gleichförmiger aber verschiedener Geschwindigkeit, bewegen, und wenn die gleichzeitigen Lagen beider Punkte durch gerade Linien verbunden werden, so umhüllen diese Linien eine Epicykloide, wenn die Bewegungsrichtung der beiden Punkte eine gleiche und eine Hypocykloide, wenn sie eine entgegengesetzte ist.

Nehmen wir den Mittelpunkt des Kreises zugleich als Anfangspunkt der Koordinaten und legen die X axe durch einen solchen Punkt, in dem sich die beiden variablen Punkte begegnen, während das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten n ($n > 1$) ist, so sind die Punkte gegeben durch die Gleichungen:

$$1)\ x_1 = a \cdot \cos\varphi; \quad y_1 = a \cdot \sin\varphi.$$

$$2)\ x_2 = a \cdot \cos n\varphi; \quad y_2 = a \cdot \sin n\varphi.$$

Die Gleichung der Verbindungslinie der variablen Punkte lautet also:

$$x \cdot (\sin n\varphi - \sin\varphi) - y \cdot (\cos n\varphi - \cos\varphi) = a \cdot \sin(n-1)\varphi.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung und die Berechnung des Durchschnittspunktes der beiden Geraden erhalten wir für dessen Koordinaten die Werte:

---

*) Schlömilch, Kahl und Kantor. Bd. 15.

$$x = \frac{a}{n+1} (n \,.\, \cos \varphi + \cos n \varphi)$$

$$y = \frac{a}{n+1} (n \,.\, \sin \varphi + \sin n \varphi)$$

Dies sind die Simultangleichungen der Epicykloide. Setzen wir jetzt an Stelle von n den Wert $(-n)$, so ergeben sich die Gleichungen der Hypocykloide

$$x = \frac{a}{1-n} (-n \,.\, \cos \varphi + \cos n \varphi)$$

$$y = \frac{a}{1-n} (-n \,.\, \sin \varphi - \sin n \varphi),$$

die sich leicht in die später von uns aufzustellenden Gleichungen der Kurve umformen lassen.

Es sei hier nur noch bemerkt, daß die dreieckige Hypocykloide sich ergiebt für den absoluten Werth von $n = 2$, so daß also der Satz jetzt lautet:

Bewegen sich zwei Punkte auf einer Kreisperipherie in entgegengesetzter Richtung, der eine mit der doppelten Geschwindigkeit des anderen, so umhüllen ihre Verbindungslinien eine dreieckige Hypocykloide.

Aus der Art der Bewegung geht übrigens sofort hervor, daß die Punkte dreimal zusammenfallen und daß diese drei Punkte jeder von den beiden anderen um $^1/_3$ der Kreisperipherie entfernt liegt.

Siebeck*) hat die dreieckige Hypocykloide studiert als eine durch Bewegung eines Punktes erzeugte Kurve. Aus der umfangreichen Arbeit sollen nur die für unser Thema interessanten Stellen hier Erwähnung finden. Die Erzeugungsweise ist folgende:

Läßt man die Punkte zweier sich in wenigstens zwei reellen Punkten schneidenden Kegelschnitte einander so entsprechen, daß je zwei entsprechende Punkte mit einem der Durchschnittspunkte P der Kegelschnitte in gerader Linie liegen und legt die Tangenten in zwei einander entsprechenden Punkten, so ist die von den Durchschnittspunkten der letzteren gebildete Kurve von der vierten Ordnung und der dritten Klasse.

Zu diesen Kurven gehört auch die dreieckige Hypocykloide. Das Fundamentaldreieck ist gleichseitig, nämlich das durch die Spitzen der Kurve bestimmte Dreieck. Die Doppeltangente ist die unendlich entfernte Gerade. Beschreibt man bei den Kurven vierter Ordnung und dritter Klasse um das von den Rückkehrpunkten gebildete Dreieck einen Kegelschnitt, der durch die Berührungspunkte der Doppeltangente geht — in unserem Falle sind die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte, der dem Dreieck umbeschriebene Kegelschnitt der Kreis durch die drei Spitzen — und außerdem in dasselbe Dreieck einen derjenigen Kegelschnitte, welche die Doppeltangente berühren, so lassen sich dem ersten Kegelschnitt unendlich viele Dreiecke einbeschreiben, die zugleich dem zweiten umbeschrieben sind.

Für das Verhältnis der beiden Radien ergiebt sich Folgendes. Aus der Gleichung

$$d = \sqrt{r_1^2 \pm 2\, r \,.\, r_1} \;**)$$

resultiert, da $d = 0$ ist,

$$r_1 = 2r.$$

*) Crelle, Journal. Bd. 66.

**) Salmon-Fiedler, A. G. d. K. Art. 352. Aufgabe 1.

§. 6.

Die Eigenschaften der Kurve in analytischer Darstellung sollen nun hergeleitet werden unter Zugrundelegung der Erzeugungsweise durch Rollen.

Um zu der Gleichung der Kurve zu gelangen, nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem an, dessen Anfangspunkt O sich im Mittelpunkte des festen Kreises befindet. (Figur 5.)

Der Radius des festen Kreises sei a; der Mittelpunkt des Erzeugungskreises C mit dem Radius $CD = r$. D sei der Berührungspunkt in der betrachteten Lage, M der beschreibende Punkt, während A, der Durchschnitt der positiven Xaxe mit dem festen Kreise, zugleich der Punkt ist, in dem der beschreibende Punkt M auf die Peripherie des festen Kreises fällt.

Wir fällen jetzt von C und M Perpendikel auf OA, die mit CQ resp. MP bezeichnet werden sollen, und ziehen dann MG parallel zu AO. Ferner werde der Winkel $A\hat{O}C$ mit φ, der Winkel $M\hat{C}D$ mit ϑ bezeichnet. Die Koordinaten des erzeugenden Punktes sind danach:

$$1)\quad \begin{cases} x = OP = OQ + QP \\ y = MP = CQ - CG. \end{cases}$$

Aus der Figur ergiebt sich:

$$PQ = MG = r \,.\, \sin M\hat{C}G,$$

und da:

$$M\hat{C}G = 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - \vartheta = 90^\circ + \varphi - \vartheta \text{ ist, } \sin M\hat{C}G = \cos(\varphi - \vartheta), \text{ also}$$

$$PQ = r \,.\, \cos(\varphi - \vartheta).$$

Aus der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks CGM ergiebt sich sofort

$$CG = r \,.\, \sin(\vartheta - \varphi),$$

während aus dem rechtwinkligen Dreieck CQO die Gleichungen folgen:

$$OQ = (a - r) \,.\, \cos\varphi$$
$$CQ = (a - r) \,.\, \sin\varphi.$$

Setzen wir nun die gefundenen Werte in die Gleichungen 1) ein, so resultiert:

$$2)\quad \begin{cases} x = r \,.\, \cos(\vartheta - \varphi) + (a - r) \,.\, \cos\varphi, \\ y = (a - r) \,.\, \sin\varphi - r \sin(\vartheta - \varphi). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir ferner, daß Bogen MD = Bogen AD, was sich aus der Art der Bewegung sofort ergiebt, so gilt

$$r \,.\, \vartheta = a \,.\, \varphi \text{ oder } \vartheta = \frac{a}{r} \,.\, \varphi.$$

Substituieren wir diese Werte in die Gleichungen 2), so erhalten wir nun sofort die Simultangleichungen der Hypocykloide:

$$x = (a - r) \,.\, \cos\varphi + r \,.\, \cos\left(\frac{a - r}{r} \,.\, \varphi\right)$$

$$y = (a - r) \,.\, \sin\varphi - r \,.\, \sin\left(\frac{a - r}{r} \,.\, \varphi\right).$$

Es möge hier noch der interessante Satz seine Stelle finden, der sich ergiebt, wenn wir die Gleichung

$$r \,.\, \vartheta = a \,.\, \varphi$$

in der Form einer Proportion schreiben

$$r : a = \varphi : \vartheta.$$

Die beiden bei Entstehung der Kurve in Betracht kommenden Winkel verhalten sich umgekehrt wie die Radien der Kreise, in denen sie Centriwinkel sind.

Aus den Simultangleichungen der Kurve erhalten wir durch Elimination von φ die Gleichung der Kurve selbst, die nicht unter allen Umständen transscendent ist. Denn sobald das Verhältnis zwischen den Umfängen resp. Radien der beiden Kreise einen rationalen angebbaren Wert hat, kommt der erzeugende Punkt nach einer gewissen Anzahl von Umdrehungen in seine Anfangslage zurück und die Kurve ist geschlossen oder von endlicher Ordnung, also algebraisch; sind dagegen die beiden Kreise nicht kommensurabel, so kommt der erzeugende Punkt nach keiner endlichen Anzahl von Umdrehungen in seine Anfangslage zurück und die Kurve ist transscendent.

Was die Tangente der Kurve anlangt, so möge hier ein Satz seine Stelle finden, der sich ganz allgemein auf Rollkurven bezieht und sich direkt aus der elementaren Betrachtung unendlich kleiner Größen ergiebt. Sieht man nämlich sowohl die Basiskurve, wie die rollende Kurve, als Polygone von unendlich kleinen, unendlich vielen Seiten an, so beschreibt die Marke in jedem Augenblicke einen unendlich kleinen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt im Berührungspunkte liegt. Denkt man sich diesen unendlich kleinen Kreisbogen gradlinig nach beiden Seiten verlängert, so repräsentiert die entstehende Gerade die Tangente im betrachteten Punkte. Sie steht senkrecht auf der Verbindungslinie von Marke und Berührungspunkt. Es ergiebt sich also aus dieser Betrachtung der wichtige Satz: Bei jeder Rollkurve steht die Tangente senkrecht gegen die Linie, welche vom betrachteten Punkte nach dem Berührungspunkte hinläuft. Diese Verbindungslinie ist also die Normale der Kurve d. h. die Normale der Rollkurve geht für jeden Punkt durch den zugehörigen Berührungspunkt der erzeugenden Kurven.

§. 7.

Aus den allgemeinen Gleichungen der Hypocykloide gelangen wir nun zu denen der dreieckigen, wenn wir $a = 3r$ setzen.

Für diesen Wert von a gehen die Gleichungen über in:

$$x = 2r \,.\, \cos\varphi + r \,.\, \cos 2\varphi$$
$$y = 2r \,.\, \sin\varphi - r \,.\, \sin 2\varphi.$$

Die Gleichung der Kurve resultiert aus der in diesem Falle möglichen Elimination von φ, als:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8rx\,(3y^2 - x^2) + 18r^2\,(x^2 + y^2) - 27r^4 = 0.$$

Schon Euler hat nachgewiesen, daß dieselbe Hypocykloide auf zwei Arten erzeugt werden kann, d. h. für zwei verschiedene Werte des Radius des rollenden Kreises; diese beiden Werte sind diejenigen, die sich zum Radius des festen Kreises summieren. Der analytische Beweis dieses Satzes ist leicht *).

Es möge hier noch einmal darauf hingewiesen werden, daß r dieselbe Bedeutung hat, wie in den obigen Ausführungen, da der Radius des rollenden Kreises gleich ist dem Radius des Feuerbach'schen Kreises, der identisch ist mit dem Kreise, der der Kurve einbeschrieben werden kann.

Es wird nicht überflüssig sein, auch hier noch einmal die Gestalt der Kurve zu erörtern.

Da der Radius des beweglichen Kreises ein Drittel von dem des festen Kreises ist, so wird die die Kurve beschreibende Marke den festen Kreis dreimal treffen und zwar in symmetrisch liegenden Punkten, so daß deren Verbindungslinien mit dem Koordinatenanfangspunkt unter einander gleiche Winkel von 120° bilden. In diesen Punkten besitzt die Kurve Spitzen erster Art; die Tangenten in diesen Punkten

*) Salmon-Fiedler, H. C. Art. 307.

sind Radien des festen Kreises. Ist der Kreis um 60° aus der anfänglichen Lage gerollt, so liegen Anfangspunkt, Berührungspunkt und Erzeugungspunkt in einer Geraden. Der Kurvenpunkt ist um r von 0 entfernt. Gleiches findet statt für $\varphi = 180°$ und für $\varphi = 300°$. Es geht hieraus hervor, daß sich der Kurve ein Kreis einbeschreiben läßt. Nach dem oben gefundenen Tangentensatze sind die Tangenten in diesen Punkten senkrecht zu den Radien des festen Kreises und bilden ein gleichseitiges Dreieck. Zugleich liegt hierin die Bestätigung dafür, daß für $\varphi = o$, $\varphi = 120°$, $\varphi = 240°$ die Tangenten die Radien des festen Kreises sind.

Die Bedingung für die Rückkehrpunkte ist

$$\frac{dx}{d\varphi} = 0 \text{ und zugleich } \frac{dy}{d\varphi} = 0.$$

also bei unserer Kurve

$$\begin{cases} \cos\psi \, . \sin 3\psi = 0 \\ \sin\psi \, . \sin 3\psi = 0 \end{cases}$$

wo $\psi = \frac{\varphi}{2}$ ist.

Diese Bedingungen werden erfüllt für $\psi = 0;\ \psi = \frac{\pi}{3};\ \psi = \frac{2\pi}{3}$.

In diesen Punkten d. h. den Punkten, die diesen Werten des Wälzungswinkels entsprechen, befinden sich also Spitzen erster Art. Die Koordinaten dieser Punkte sind:

$$1)\ x = 3r;\ y = 0.$$

$$2)\ x = -3r \, . \cos\frac{\pi}{3};\ \ y = 3r \, . \sin\frac{\pi}{3}.$$

$$3)\ x = -3r \, . \cos\frac{\pi}{3};\ \ y = -3r \, . \sin\frac{\pi}{3}.$$

Diese drei Punkte genügen auch mit ihren Koordinaten der Gleichung des festen Kreises

$$x^2 + y^2 = 9r^2$$

so daß wir hier die Bestätigung für unsere oben angestellten geometrischen Betrachtungen haben.

Die allgemeine Gleichung der Tangente in einer Spitze erster Art ist nun

$$(Y - y)\frac{d^2 x}{d\varphi^2} - (X - x)\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = 0.$$

Auf unsere Kurve die Anwendung gemacht ergiebt sich für:

Punkt 1) $Y = 0$, also die X axe.

Punkt 2) $Y \, . \cos\frac{\pi}{3} + X \, . \sin\frac{\pi}{3} = 0$,

die Gleichung einer Geraden durch den Anfangspunkt, und ebenso für

Punkt 3) $Y \, . \cos\frac{\pi}{3} - X \, . \sin\frac{\pi}{3} = 0$,

während die Winkel, welche die drei Geraden mit einander bilden, sich aus bekannten Formeln = 120° ergeben.

Es entspricht dies dem Fall, daß dem Fundamentaldreieck eine Ellipse eingeschrieben ist. Die drei Spitzen der Kurve liegen in den Fundamentalpunkten *).

*) Salmon-Fiedler, H. C. Art. 285.

Unter Anwendung der Differentialrechnung finden wir die Gleichung der Tangente aus der Gleichung:

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{dx}{dy}$$

$x \,.\, sin \frac{\varphi}{2} + y \,.\, cos \frac{\varphi}{2} = r \,.\, sin \frac{3\varphi}{2}$ oder an Stelle von $\frac{\varphi}{2} : \psi$ gesetzt:

$$x \,.\, sin\, \psi + y \,.\, cos\, \psi = r \,.\, sin\, 3\, \psi$$

wo ψ also den halben Drehungswinkel repräsentiert. Der bekannte Wert für die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente mit der positiven X axe bildet

$$tg\, \tau = \frac{dy}{dx}$$

giebt uns für unsere Kurve: $\tau = \pi - \psi$, in Worten: Die Summe des Tangentenwinkels und des zugehörigen halben Drehungswinkels ist konstant, und zwar $= \pi$.

Die Gleichung der Normale der Kurve aus der Gleichung

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = - \frac{dy}{dx}$$

liefert uns die Gleichung:

$$x \,.\, cos\, \psi - y \,.\, sin\, \psi = 3\, r \,.\, cos\, \psi.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung der Tangente, so erfüllen sie in der That die geforderte Bedingung:

$$cos\, \psi \,.\, sin\, \psi - sin\, \psi \,.\, cos\, \psi = 0.$$

Die Werte für Subtangente (St), Subnormale (Sn), Länge der Tangente (T) und Länge der Normalen (N) werden leicht gefunden, wie folgt:

$$St = - 2\, r \,.\, sin^2\, \varphi.$$
$$Sn = - 8\, r \,.\, sin^4\, \psi.$$
$$T = \pm\, 4\, r \,.\, sin\, \varphi \,.\, sin\, \psi.$$
$$N = 8\, r \,.\, sin^3\, \psi.$$

Zur vollständigen Bestimmung der Kurve erübrigt es noch, die Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises und die Länge des Krümmungsradius zu berechnen. Die einfachste Art zur Bestimmung des Krümmungskreises ist jedenfalls die, den Schnittpunkt zweier unendlich naher Normalen zu berechnen. Die Gleichung der Normale war

$$x \,.\, cos\, \psi - y \,.\, sin\, \psi = 3\, r \,.\, cos\, 3\, \psi.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach ψ finden wir die Gleichung der unendlich benachbarten Normalen:

$$x \,.\, sin\, \psi + y \,.\, cos\, \psi = 9\, r \,.\, sin\, 3\, \psi.$$

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen nach x und y finden wir die Gleichung des Mittelpunktes:

$$x = 6\, r \,.\, cos\, 2\, \psi - 3\, r\, cos\, \psi$$
$$y = 6\, r \,.\, sin\, 2\, \psi + 3\, r\, sin\, \psi$$

oder wenn wir wiederum $\psi = \frac{\varphi}{2}$ und $3\, r = a$ setzen:

$$x = 2\, a \,.\, cos\, \varphi - a \,.\, cos\, 2\, \varphi$$
$$y = 2\, a \,.\, sin\, \varphi + a \,.\, sin\, 2\, \varphi.$$

Diese beiden Gleichungen, welche uns also für jedes bestimmte φ den Mittelpunkt des resp. Krümmungskreises liefern, geben uns für das variable φ den Ort der Krümmungsmittelpunkte. Dieser ist aber die Evolute der Kurve; die Gleichungen repräsentieren also zugleich die Simultangleichungen der Evolute. Daß dieselbe jedenfalls eine der ursprünglichen Kurve ähnliche Kurve sein wird, geht schon aus diesen Gleichungen hervor, tritt aber in Evidenz, wenn wir eine Koordinatentransformation vornehmen.

Zu dem Zwecke wenden wir folgende Transformationsformeln an:

$$x = \xi \,.\, cos\, \vartheta - \eta \,.\, sin\, \vartheta$$
$$y = \xi \,.\, sin\, \vartheta + \eta \,.\, cos\, \vartheta$$

in denen ϑ den Wert $\frac{\pi}{3}$ besitzt, so daß wir auch für $\varphi : \chi + \frac{\pi}{3}$ setzen müssen. Unter diesen Voraussetzungen gehen die gefundenen Gleichungen der Evolute über in die folgenden:

$$\xi = 2a \,.\, cos\, \chi + a \,.\, cos\, 2\chi$$
$$\eta = 2a \,.\, sin\, \chi - a \,.\, sin\, 2\chi$$

also vollständig analoge Gleichungen wie die der Evolvente. Alles also, was für diese als geltend bewiesen war, gilt auch für jene. Die Gleichungen zeigen aber, daß der feste und der rollende Kreis für Erzeugung der Evolute dreimal so große Radien haben müssen als die die Evolvente erzeugenden Kreise. Die Evolute liegt auch um $\frac{\pi}{3}$ gegen das Axensystem gedreht, so daß ihre Scheitel in den Rückkehrpunkten der Evolvente liegen.

Wir könnten nun die zweite, dritte u. s. f. Evolute bilden, die alle wiederum dreieckige Hypocykloiden sein werden und zwar werden immer die erste, dritte &c. und die zweite, vierte &c. ähnlich liegen, während das Verhältnis zwischen den Radien der Evoluten den konstanten Wert $n = 3$ besitzt. Andrerseits können wir aber auch die ursprüngliche Kurve als Evolute ansehen und die Evolvente derselben bilden, auch diese wird wieder eine dreieckige Hypocykloide sein und auch hier läßt sich die Operation in infinitum ausdehnen, während das Verhältnis der Radien hier das reciproke ist, wie im anderen Falle.

Unter den vielen Formeln, die es zur Berechnung des Krümmungsradius giebt *), soll hier diejenige den Vorzug haben, die nach vorausgegangener Berechnung des Krümmungsmittelpunktes sich als die einfachste darstellt

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

wo (xy) die Koordinaten der Evolventenpunkte, $(\xi\eta)$ diejenigen der Evolute bedeuten. Es ergiebt sich durch Ausrechnung:

$$R = 8r \,.\, sin\, \frac{3\varphi}{2} = 8r \,.\, sin\, 3\psi$$

Für die verschiedenen merkwürdigen Punkte, die Spitzen und Scheitel der Kurve ergeben sich folgende Spezialwerte von R: für die drei Spitzen ist $R = O$, für die drei Scheitel $R = 8r$.

Fällt man von irgend einem Punkte der Ebene der Kurve Perpendikel auf ihre sämmtlichen Tangenten, so werden die Fußpunkte dieser Perpendikel eine neue Kurve bilden, deren Form von der der ersten abhängt und die die Fußpunktskurve oder Pedalkurve der betreffenden Kurve in Beziehung auf den Punkt als Pol heißt. Die Pedalkurve können wir auch definiren als den Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel durch einen festen Punkt geht, während der andere Tangente an die gegebene Kurve bleibt. — Diese Definition giebt zugleich eine sehr einfache Konstruktion der Pedalkurve

*) Salmon-Fiedler, H. C. Art. 100—102, giebt schon drei verschiedene Formeln.

mit Hülfe eines festen rechten Winkels an die Hand. — Es sei bei unserer Kurve der Anfangspunkt als Pol angenommen und unsere Aufgabe die zugehörige Pedalkurve zu berechnen.

Die Gleichung einer Normalen durch den Anfangspunkt ist

$$\eta = -\frac{dx}{dy} \cdot \xi = \xi \cdot cot\, \frac{\varphi}{2} = \xi \; cot\; \psi$$

oder $\xi = \eta \cdot tg\; \psi;$

die Gleichung der Tangente ist

$$x \cdot sin\; \psi + y \cdot cos\; \psi = r \cdot sin\; 3\, \psi.$$

Durch Vereinigung der beiden Gleichungen erhalten wir:

$$x = r \cdot sin\; 3\, \psi \cdot sin\, \psi$$
$$y = r \cdot sin\; 3\, \psi \cdot cos\, \psi$$

als Simultangleichungen der Pedalkurve, deren Gleichung durch Elimination von ψ sich ergiebt als:

$$(y^2 - x^2)^2 = \frac{x^2}{4}\,(9\, r^2 - 16\, x\, r).$$

Die Kurve geht folglich durch den Anfangspunkt. Aus ihrer Entstehungsart durch Bewegung eines rechten Winkels geht außerdem hervor, daß sie die Hypocykloide in den drei Scheiteln berührt und daß der Koordinatenanfangspunkt ein dreifacher Punkt ist, da sich für jede Spitze der Scheitel des rechten Winkels in dem Anfangspunkt befindet. Die Pedalkurve besteht also aus drei Schleifen. Die drei Rückkehrtangenten der Hypocykloide, die sich, wie wir gesehen, im Anfangspunkt schneiden, bilden dort drei sich schneidende Tangenten der Pedalkurve (s. Figur 6).

Die Länge eines Bogens des Kurvendreiecks finden wir aus der Gleichung:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Für unsere Kurve ergiebt sich:

$$\int ds = 4\, r \cdot \int sin\, \frac{3\, \varphi}{2} \cdot d\varphi$$

woraus sich durch Umformung:

$$\int ds = \frac{8\, r}{3} \int sin\; x \cdot dx$$

ergiebt. Dies Integral ist zwischen den Grenzen o und π zu nehmen. Wir erhalten so

$$\int_o^\pi ds = \frac{16}{3}\, r.$$

folglich für die Länge der Hypocykloide selbst

$$S = 16\, r.$$

Unter Anwendung der Polarkoordinaten finden wir leicht den Inhalt der Hypocykloide

$$J = 2\, \pi\, r^2$$

Derselbe beträgt also das Doppelte des der Kurve einbeschriebenen Kreises. (Bei der Annahme der früheren Erzeugungsweise beträgt also der Inhalt der Hypocykloide das Doppelte des Feuerbach'schen Kreises, ist folglich gleich der Hälfte des dem Urdreieck umbeschriebenen Kreises.) Jede Arbele ist demnach $= \frac{1}{3}\, \pi\, r^2$.

Kapitel II.

Die viereckige Hypocykloide.

§. 1.

Bei weitem einfacher stellt sich die andere Art der Hypocykloide dar, die den zweiten Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet, die viereckige Hypocykloide (s. Figur 7.)

Auch sie läßt sich noch auf andere Art erzeugen als durch Rollen. Lassen wir bei rechtwinkligen Koordinaten eine Gerade sich so bewegen, daß die Endpunkte eines begrenzten Stückes auf den Axen des Systems hinlaufen, so ist die Enveloppe dieser Geraden die viereckige Hypocykloide, während der Ort des Mittelpunktes der Strecke ein Kreis ist, der der Hypocykloide eingeschrieben ist. Seine Gleichung ist

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Jeder andere Punkt der Strecke beschreibt eine Ellipse. Die unendliche Schaar der Ellipsen für sämmtliche Punkte der Strecke wird eingehüllt von der Hypocykloide. Der Mittelpunkt als beschreibender Punkt der Ellipse bildet also den einen Spezialfall der Ellipse, in dem sie in einen Kreis übergeht, die beiden Endpunkte, die beiden Fälle, in denen die Ellipse in eine Gerade degeneriert. Diese beiden Geraden sind die Axen des Systems. Entstanden können wir uns die Ellipsen auch noch auf folgende Art denken. Ein Kreis rollt in einem andern, dessen Radius das Doppelte von dem seinigen ist. Jeder Punkt der Peripherie des rollenden Kreises beschreibt alsdann eine Gerade, die durch den Mittelpunkt des festen Kreises geht, während jeder innere Punkt eine Ellipse beschreibt.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichung der Enveloppe aufzustellen. Die Gleichung der Linie ist:

$$\frac{x}{OB} + \frac{y}{OA} = 1 \text{ (s. Figur 8),}$$

$$\text{wo } OB = l \,.\, \cos\varphi$$
$$OA = l \,.\, \sin\varphi.$$

Die Gleichung der Linie ist also:

$$x \,.\, \sin\varphi + y \,.\, \cos\varphi = \tfrac{1}{2} l \,.\, \sin 2\varphi$$

Durch Differentiation und Berechnung des Durchschnittspunktes ergeben sich die Simultangleichungen der Kurve

$$x = l \,.\, \cos^3\varphi$$
$$y = l \,.\, \sin^3\varphi$$

folglich die Gleichung der Kurve selbst

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

Zu derselben Gleichung gelangen wir, wenn wir in der allgemeinen Gleichung der Hypocykloide $a = 4r$ setzen; die Gleichung der viereckigen Hypocykloide ist alsdann:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4r)^{\frac{2}{3}};$$

Die Länge der einhüllenden Strecke ist also gleich dem Radius des festen Kreises.

Es ergiebt sich hieraus der bemerkenswerte Satz: Der Abschnitt der Tangente zwischen den Axen hat einen konstanten Wert und zwar ist er gleich dem Radius des festen Kreises.

Ohne hier noch einmal auf die bei der Kurve auftretenden, möglichen ein- und umbeschriebenen Polygone einzugehen, weise ich in Bezug darauf auf das oben bei Untersuchung der dreieckigen Hypocykloide Gesagte zurück. Nur das mag erwähnt werden, daß die Polygone dem Charakter der Kurve entsprechend hier regelmäßige Vierecke sind, während wir sie oben als gleichseitige Dreiecke erkannten.

§. 2.

Die Bedingung für die Rückkehrpunkte ist für die viereckige Hypocykloide die gleichzeitige Gültigkeit

$$\begin{cases} \cos^2\varphi \,.\, \sin\varphi = 0 \\ \sin^2\varphi \,.\, \cos\varphi = 0. \end{cases}$$

Diese Bedingungen werden erfüllt für $\varphi = o$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \pi$; $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Die Koordinaten dieser Punkte sind:

1) $x = 4r$; $y = 0$.
2) $x = o$; $y = 4r$.
3) $x = -4r$; $y = 0$.
4) $x = 0$; $y = -4r$.

Die Gleichungen der Tangenten in diesen Spitzen ergeben sich in den Punkten 1) und 3) als die X axe, in den Punkten 2) und 4) als die Y axe. Die vier Punkte genügen der Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = 16\,r^2.$$

Eine der viereckigen Hypocykloide sehr ähnliche Figur erhalten wir in der Evolute der Ellipse. Auch diese besitzt vier Spitzen, von denen zwei auf der X axe, zwei auf der Y axe, und zwar symmetrisch gegen den Anfangspunkt resp. Mittelpunkt der Ellipse liegen.

Die Simultangleichungen der Ellipsenevolute sind, für die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = \alpha \,.\, \cos^3\vartheta;\; y = -\beta \,.\, \sin^3\vartheta$$

und ihre Gleichung selbst

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

wo $\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}$

$\beta = \frac{a^2 - b^2}{b}$ ist.

Man sieht, daß auch die Gleichungen eine große Ähnlichkeit besitzen.

Die Gleichung der Tangente an unsere Kurve ist, mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung berechnet:

$$x \,.\, \sin\varphi + y \,.\, \cos\varphi = 2r \,.\, \sin 2\varphi,$$

stimmt also mit der Gleichung der erzeugenden Graden überein.

Als Gleichung der Normalen erhalten wir:

$$x \,.\, \cos\varphi - y \,.\, \sin\varphi = 4\,r \,.\, \cos 2\,\varphi.$$

Ferner ergeben sich:

$$St = -2r \, . \, \sin\varphi \, . \, \sin 2\varphi.$$
$$Sn = -4r \, . \, \sin^4\varphi \, . \, \frac{1}{\cos\varphi}$$
$$T = 4r \, . \, \sin^2\varphi$$
$$N = 4r \, . \, \frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

Die Evolute findet sich auf demselben Wege, wie bei der dreieckigen Hypocykloide. Ihre Simultangleichungen sind:

$$x = 4r \, . \, \cos\varphi \, . \, \cos 2\varphi + 8r \, . \, \sin\varphi \, . \, \sin 2\varphi$$
$$y = 8r \, . \, \cos\varphi \, . \, \sin 2\varphi - 4r \, . \, \sin\varphi \, . \, \cos 2\varphi.$$

Mit Hilfe der Transformationsformeln:

$$\xi = x \, . \, \cos\vartheta - y \, . \, \sin\vartheta$$
$$\eta = x \, . \, \sin\vartheta + y \, . \, \cos\vartheta,$$

wo $\vartheta = 45^0$ ist, und für die Substitution $\varphi = \psi + \frac{\pi}{4}$ ergiebt sich:

$$x = 8r \, . \, \cos^3\psi$$
$$y = 8r \, . \, \sin^3\psi.$$

Die Evolute ist also wiederum eine viereckige Hypocykloide, deren Konstante aber, der Radius des festen oder rollenden Kreises = dem doppelten derjenigen der Evolvente ist. Die Gleichung der Evolute ist:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (8r)^{\frac{2}{3}}.$$

Salmon-Fiedler *) giebt die Evolute der Kurve:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

in der Form:

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

Die Betrachtungen über die nach beiden Richtungen möglichen Kurven, die Evoluten und Evolventen, sollen hier nicht wiederholt werden.

Der Krümmungsradius hat die Länge

$$l = 6r \, . \, \sin 2\varphi.$$

Durch Spezialisirung von φ erhält man für die vier Scheitelpunkte den Krümmungsradius $= 6r$.

Es möge hier als merkwürdige Thatsache konstatirt werden, daß Verhältniszahl multipliziert mit dem Krümmungsradius der Scheitelpunkte bei gleichen rollenden, aber verschiedenen festen Kreisen, ein gleiches Resultat liefern. Die Radien der festen Kreise verhalten sich wie die Verhältniszahlen.

Die Simultangleichungen der Pedalkurve sind:

$$x = 2r \, . \, \sin\varphi \, . \, \sin 2\varphi$$
$$y = 2r \, . \, \cos\varphi \, . \, \sin 2\varphi.$$

Die Gleichung der Fußpunktskurve resultiert daraus als folgende:

$$(x^2 + y^2)^3 = 16r^2 \, . \, x^2 \, . \, y^2.$$

---

*) Salmon-Fiedler, H. C. Art. 99. Beispiel 6.

Es erübrigt noch die Rektifikation und Quadratur vorzunehmen. Wir erhalten für den Bogen zwischen zwei Axen:

$$\int ds = 6\,r \,.\int sin\; 2\,\varphi \;.\; d\,\varphi,$$

so daß sich ergiebt:

$$s = 6\,r,$$

woraus wir für den ganzen Umfang erhalten:

$$S = 24\,r.$$

Der Inhalt der Kurve findet sich als $J = 6\,r^2 \,.\, \pi$, also das Sechsfache des rollenden Kreises. Der eingeschriebene Kreis beträgt $4\,\pi\,r^2$, so daß sich für den Inhalt einer Arbele $\frac{1}{2}\,\pi\,r^2$ ergiebt, also die Hälfte des rollenden Kreises.

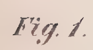
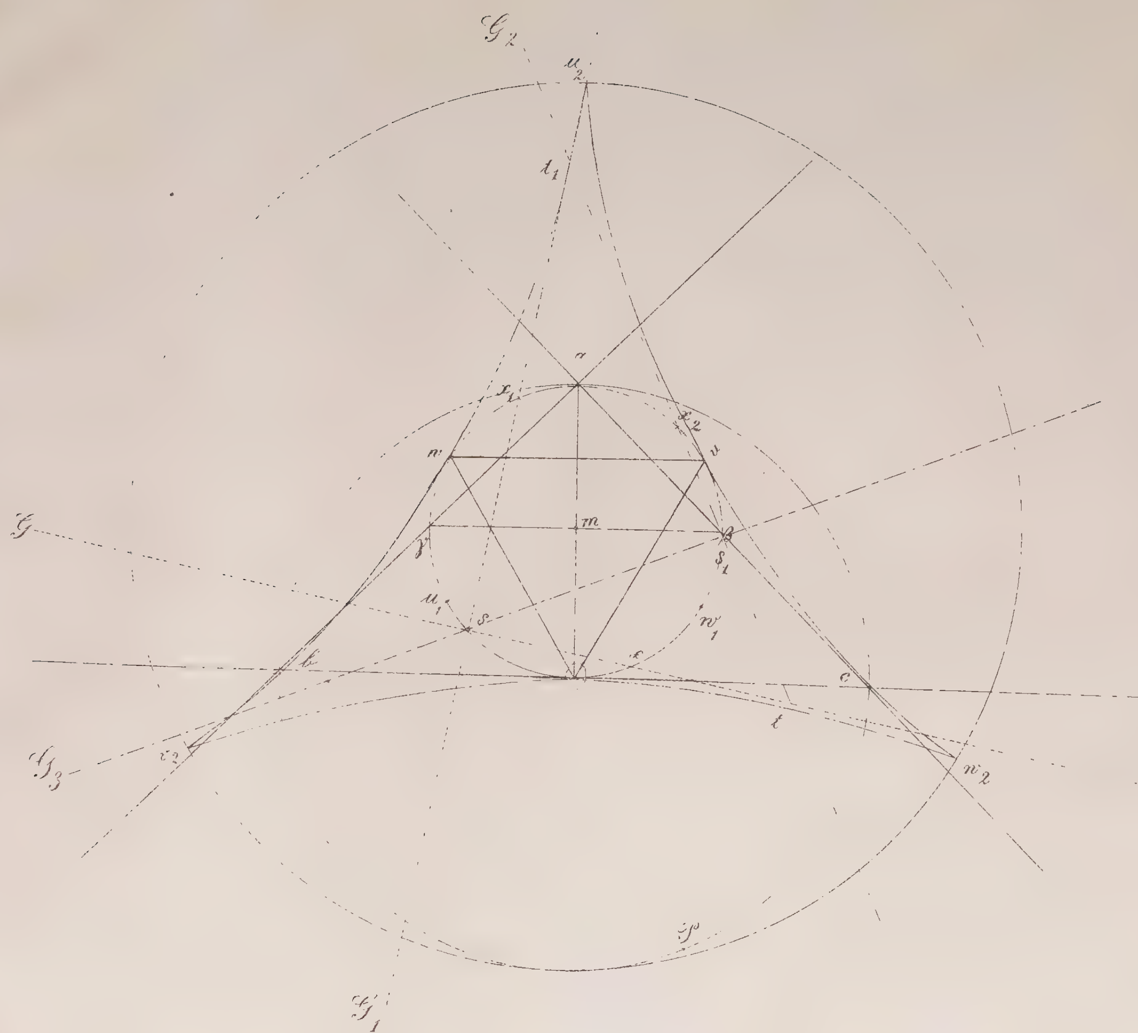


Fig. 1.



$\mathcal{G}_2$
u_2
t_1
a
x_1
x_2
w
v
m
$\mathcal{G}$
β
s_1
u_1
s
w_1
b
c
t
$\mathcal{G}_3$
v_2
w_2
$\mathcal{G}_1$

Fig. 2.

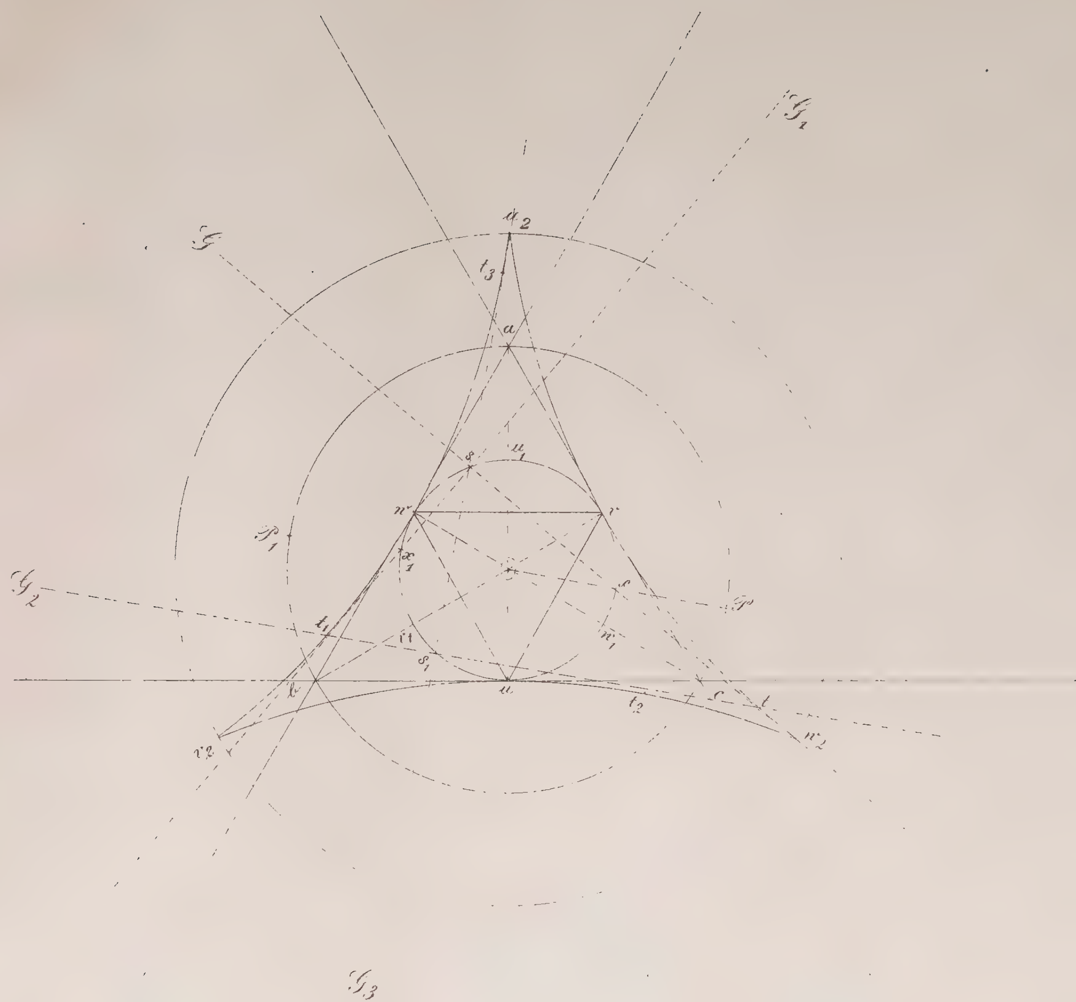


Fig. 3.

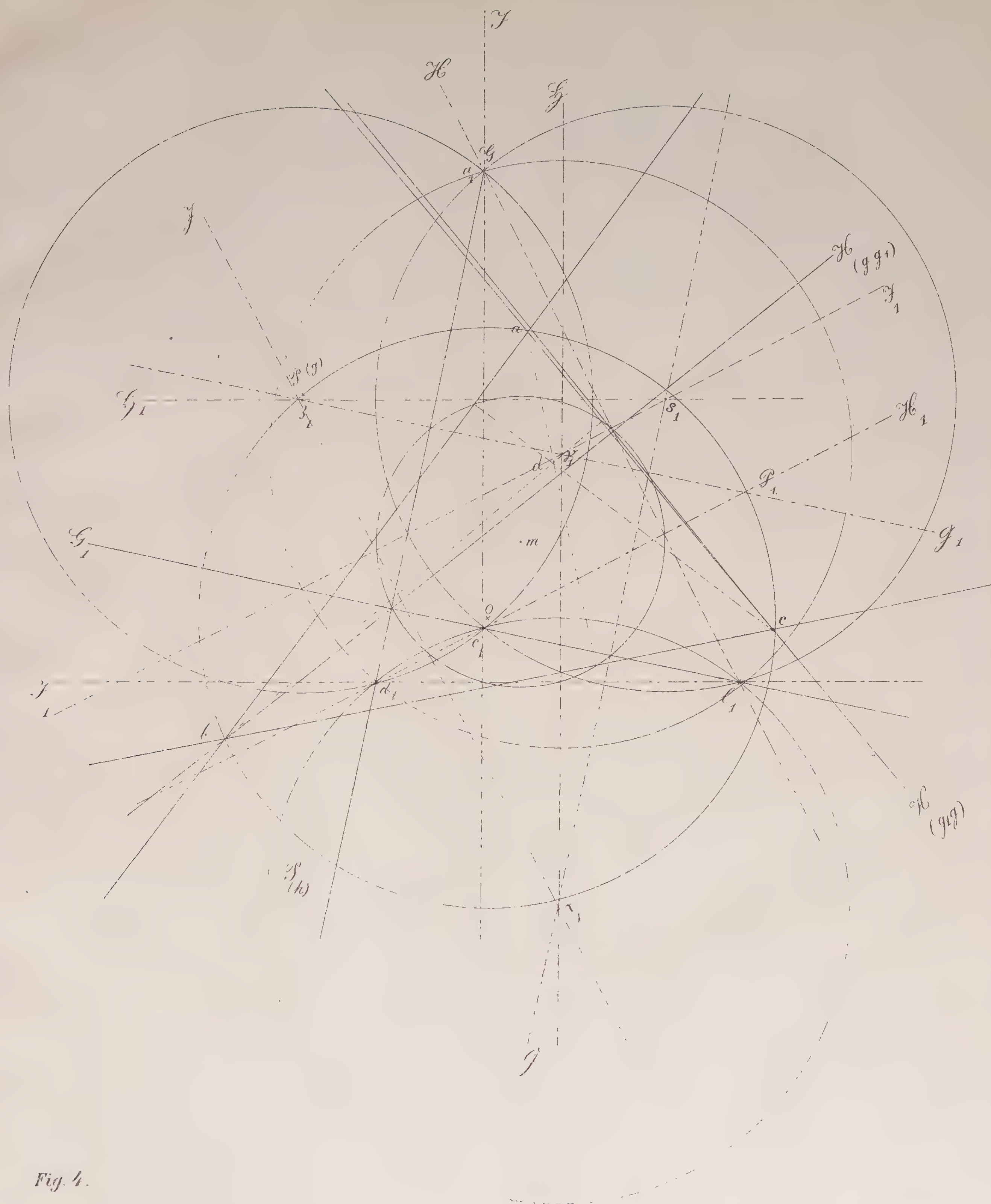


Fig. 4.

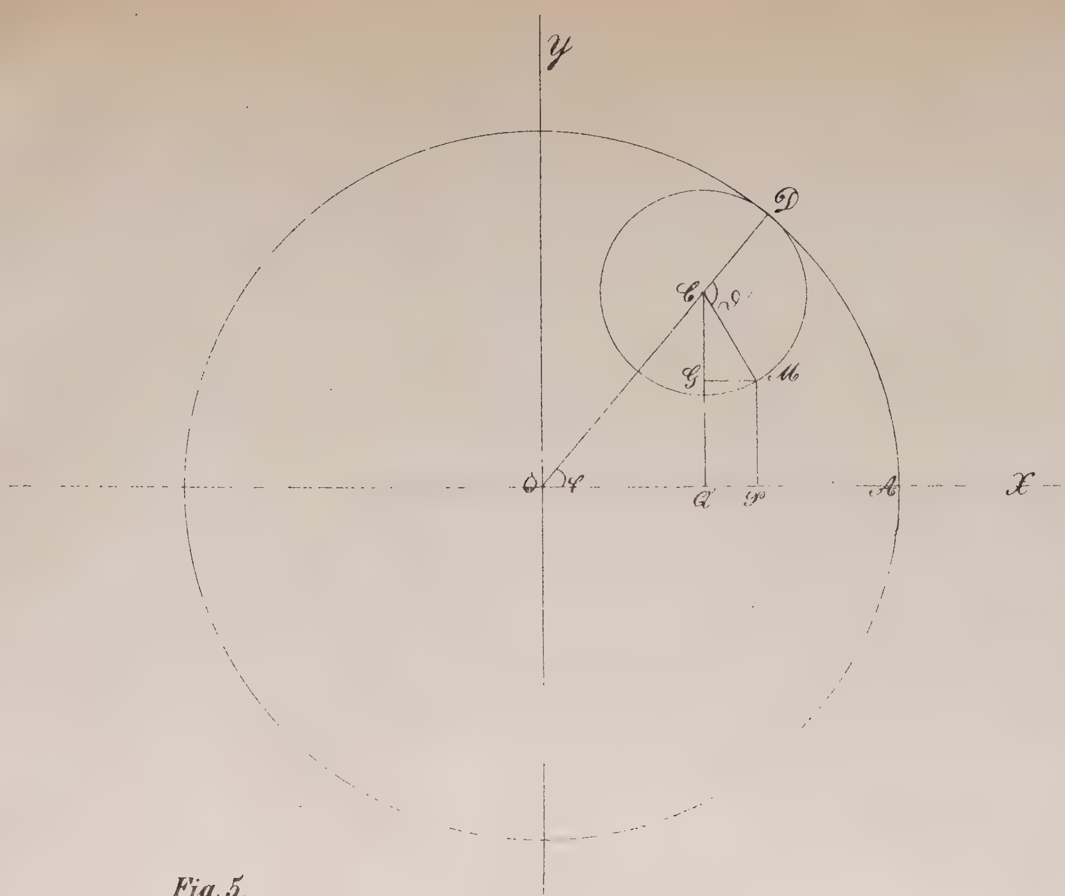


Fig. 5.

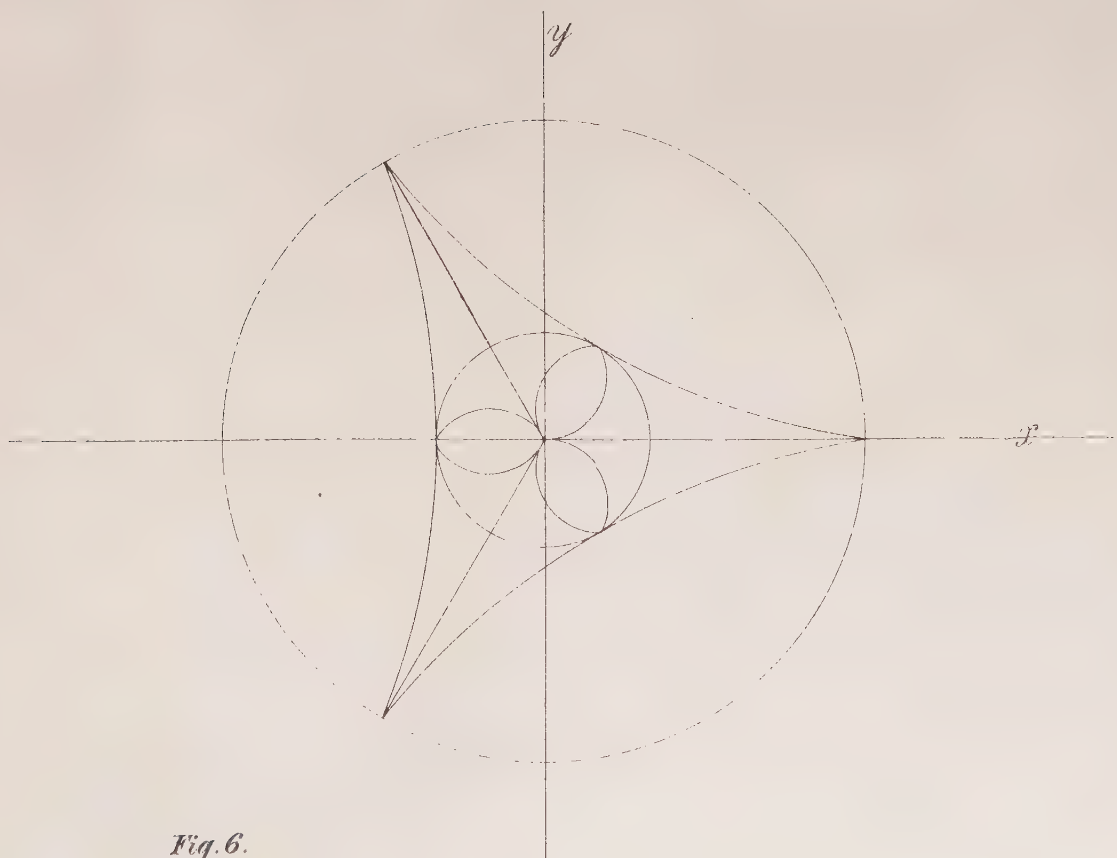


Fig. 6.

y

x

Fig. 7.

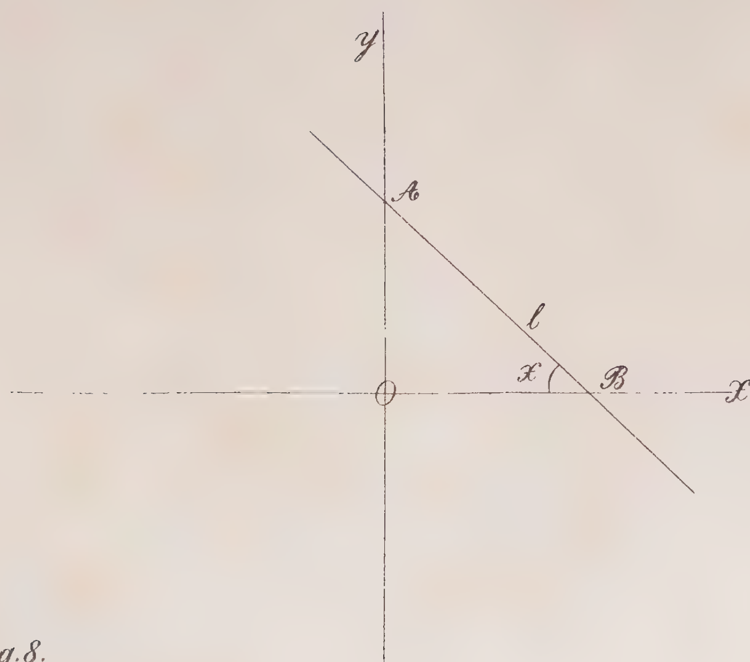


Fig. 8.